

NOMBRES RÉELS

Partie 1 : Nombres entiers

 Vidéo <https://youtu.be/HMY31orMLjs>

1. Nombres entiers naturels

Définition : Un **nombre entier naturel** est un nombre entier qui est positif.

L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots\}$.

Exemples :

$4 \in \mathbb{N}$ (4 appartient à l'ensemble des entiers naturels)

$-2 \notin \mathbb{N}$ (-2 n'appartient pas à l'ensemble des entiers naturels)

2. Nombres entiers relatifs

Définition : Un **nombre entier relatif** est un nombre entier qui est positif ou négatif.

L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$.

Exemples : $-2 \in \mathbb{Z}$

$5 \in \mathbb{Z}$

$0,33 \notin \mathbb{Z}$

Partie 2 : Nombres décimaux, nombres rationnels

1. Nombres décimaux

Définition : Un **nombre décimal** est un nombre qui s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$.

Exemples : $0,56 \in \mathbb{D}$

$3 \in \mathbb{D}$

$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ car $\frac{1}{3} \approx 0,3333 \dots$

$\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$ car $\frac{3}{4} = 0,75$

Remarque :

Un nombre décimal peut toujours s'écrire sous la forme de la fraction d'un entier et d'une puissance de 10.

Par exemple : $2,36 = \frac{236}{100} = \frac{236}{10^2}$

2. Nombres rationnels

Définition : Un **nombre rationnel** est une fraction (*).

L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$.

(*) Une fraction s'écrit sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul.

Exemples : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $4 \in \mathbb{Q}$ $-4,8 \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démonstration :

 **Vidéo** <https://youtu.be/SHRo1ISyIXI>

Démontrons que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal.

Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal.

Alors il peut s'écrire sous la forme de la fraction **d'un entier** et **d'une puissance de 10**.

Soit $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$ avec a entier et p entier naturel.

Donc $10^p = 3a$ et donc 10^p est divisible par 3.

Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Or, ceci est impossible car la somme des chiffres de 10^p est 1, et 1 n'est pas divisible par 3.

Donc l'hypothèse posée au départ est fausse et donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

Partie 3 : Notion de nombres réels

1. Nombres irrationnels

Définition : Un **nombre irrationnel** est un nombre qui ne peut pas s'écrire à l'aide d'une fraction.

Exemples :

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou encore π sont des nombres irrationnels.

Ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction.

Remarque :

Il n'est pas possible d'écrire un nombre irrationnel sous forme décimale. Les décimales qui le constituent sont en nombre infini et se suivent sans suite logique.

2. Nombres réels

Définition : Un nombre réel est un nombre rationnel ou irrationnel.

L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$.

Exemples :

2, -5, 0.67, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{3}$ ou π appartiennent à $\mathbb{R}$.

Remarques :

- Un nombre est réel s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée appelée la **droite numérique**.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres que nous utilisons en classe de seconde.

Démonstration : Irrationalité de $\sqrt{2}$



Vidéo <https://youtu.be/oRcTINh1Sjc>

On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons donc que $\sqrt{2}$ est un rationnel.

Il s'écrit alors $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels premiers entre eux, b non nul.

Ainsi : $\frac{a^2}{b^2} = 2$ soit $a^2 = 2b^2$.

On en déduit que a^2 est pair, ce qui entraîne que a est pair.

En effet, si a était impair, alors a^2 serait impair (voir Chapitre « Notion de multiple, diviseur et nombre premier »).

Puisque a est pair, il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$.

Comme, $a^2 = 2b^2$

On a : $(2k)^2 = 2b^2$

Soit : $4k^2 = 2b^2$

Soit encore $b^2 = 2k^2$.

On en déduit que b^2 est pair, ce qui entraîne que b est pair.

Or, a et b sont premiers entre eux, donc ils ne peuvent être pairs simultanément. On aboutit à une absurdité.

Donc, $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Et donc, $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

« Les nombres entiers permettent de compter, les nombres réels permettent de mesurer. »

Partie 4 : Classification des nombres



La classification des nombres :

📺 Vidéo <https://youtu.be/kL-eMNziARM>

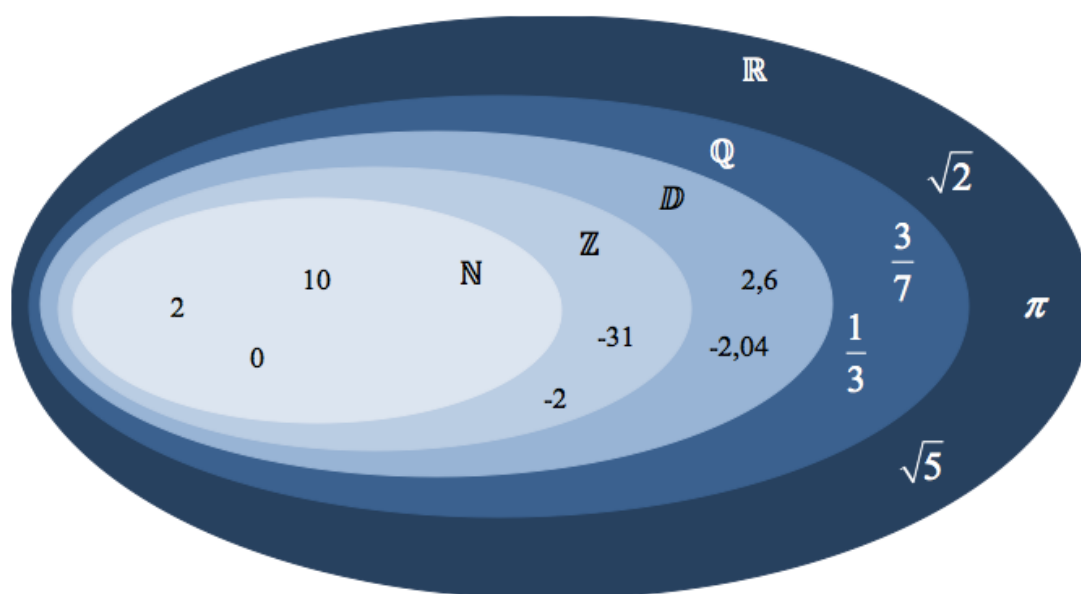
Si un nombre appartient à $\mathbb{N}$, alors il appartient à $\mathbb{Z}$.

Par exemple : $5 \in \mathbb{N}$ donc $5 \in \mathbb{Z}$.

On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On a également les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Méthode : Reconnaître la nature d'un nombre

📺 Vidéo <https://youtu.be/pKxTaignyHg>

Quel est le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants ?

- | | | | | | |
|-------------------|------------------|----------|----------------|---------------|--------------------------------|
| 1) $-\frac{1}{4}$ | 2) $\frac{2}{6}$ | 3) 1,333 | 4) $\sqrt{36}$ | 5) $\sqrt{6}$ | 6) $\frac{-3(\sqrt{2})^2}{12}$ |
|-------------------|------------------|----------|----------------|---------------|--------------------------------|

Correction

$$1) -\frac{1}{4} = -0,25$$

Donc $-\frac{1}{4} \in \mathbb{D}$ car le nombre de décimales après la virgule est en nombre fini.

$$2) \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,3333 \dots$$

Donc $\frac{2}{6} \in \mathbb{Q}$ car $\frac{2}{6}$ s'écrit uniquement sous forme d'une fraction et ne peut pas s'écrire sous forme décimale.

3) $1,333 \in \mathbb{D}$ car le nombre de décimales est en nombre fini.

$$4) \sqrt{36} = 6$$

Donc $\sqrt{36} \in \mathbb{N}$ car 6 est un nombre entier positif.

$$5) \sqrt{6} \approx 2,4495 \dots$$

Donc $\sqrt{6} \in \mathbb{R}$ car c'est un nombre irrationnel.

$$6) \frac{-3(\sqrt{2})^2}{12} = \frac{-3 \times 2}{12} = \frac{-6}{12} = -0,5$$

Donc $\frac{-3(\sqrt{2})^2}{12} \in \mathbb{D}$ car le nombre de décimales est en nombre fini.

Déterminer un arrondi d'un nombre :

 **Vidéo** <https://youtu.be/53VOST9yJfg>

Méthode : Donner un encadrement d'un nombre réel

 **Vidéo** <https://youtu.be/sJIXJT3fdclU>

A l'aide de la calculatrice donner un encadrement à 10^{-3} de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.

Correction

La calculatrice affiche des valeurs approchées :

$\sqrt{2}$	1.414213562
$\sqrt{3}$	1.732050808

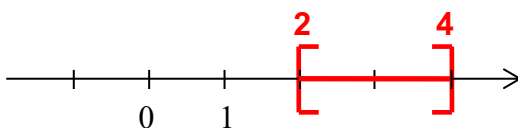
Donner un encadrement à 10^{-3} , c'est donner un encadrement d'amplitude 0,001.

On a alors les encadrements à 10^{-3} : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.

Partie 5 : Intervalles de $\mathbb{R}$

1. Notations

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $2 \leq x \leq 4$ peut se représenter sur une droite graduée.



Cet ensemble est appelé un intervalle et se note : $[2 ; 4]$

Exemple :

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-2 \leq x \leq 7$ se note : $[-2 ; 7]$.

On a par exemple :

$$4 \in [-2 ; 7]$$

$$-1 \in [-2 ; 7]$$

$$8 \notin [-2 ; 7]$$

2. Intervalle ouvert et intervalle fermé

Définitions :

On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.

On dit qu'il est **ouvert** dans le cas contraire.

Exemples :

- L'intervalle $[-2 ; 5]$ est un intervalle fermé.

On a : $-2 \in [-2 ; 5]$ et $5 \in [-2 ; 5]$

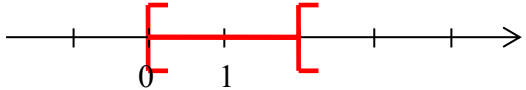
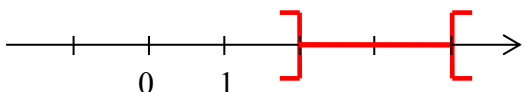
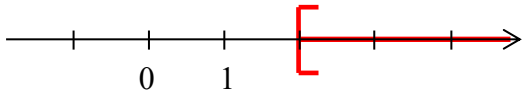
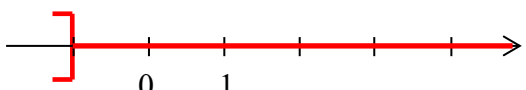
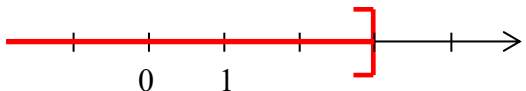
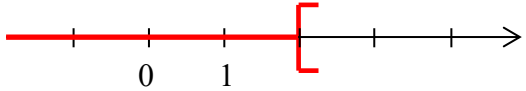
- L'intervalle $]2 ; 6[$ est un intervalle ouvert.

On a : $2 \notin]2 ; 6[$ et $6 \notin]2 ; 6[$



Vidéo <https://youtu.be/9MtAK7Xzrls>

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	$[2 ; 4]$	
$-1 < x \leq 3$	$] -1 ; 3]$	

$0 \leq x < 2$	$[0 ; 2[$	
$2 < x < 4$	$]2 ; 4[$	
$x \geq 2$	$[2 ; +\infty[$ ∞ désigne l'infini	
$x > -1$	$] -1 ; +\infty[$	
$x \leq 3$	$] -\infty ; 3]$	
$x < 2$	$] -\infty ; 2[$	

Remarques :

- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui peut se noter $] -\infty ; +\infty[$.
- L'intervalle $]6 ; +\infty[$ est un intervalle ouvert.

Méthode : Déterminer si un nombre appartient à un intervalle

 Vidéo https://youtu.be/II_nVCMHlu8

Déterminer si chacun des nombres suivants appartient à l'intervalle $I = \left] \frac{3}{4} ; 5 \right]$.

$$1 ; \frac{3}{4} ; \frac{5}{8} ; \sqrt{10}$$

Correction

- $1 \in I$, car $\frac{3}{4} < 1 \leq 5$.
- $\frac{3}{4} \notin I$, car I est un intervalle ouvert à gauche et donc son extrémité gauche, $\frac{3}{4}$, ne lui appartient pas.
- $\frac{5}{8} \notin I$, car $\frac{5}{8} = 0,625 < \frac{3}{4}$.

- $\sqrt{10} \in I$.

En effet : $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$, soit : $3 < \sqrt{10} < 4$

Et $]3 ; 4[\subset I$.

3. Application aux inéquations

Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x .

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité.

Il s'agit d'un ensemble de valeurs. Pour définir l'ensemble des solutions, on utilise les intervalles.

Les techniques de résolution des inéquations sont semblables à celles utilisées pour les équations.

Méthode : Donner les solutions d'une inéquation

📺 Vidéo <https://youtu.be/p93oVqzvog8>

Résoudre l'inéquation et donner les solutions sous forme d'un intervalle : $2x - 3 < 4$

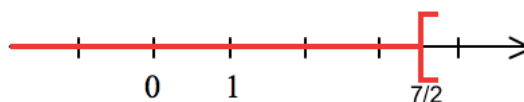
Correction

$$2x - 3 < 4$$

$$2x < 4 + 3$$

$$2x < 7$$

$$x < \frac{7}{2}$$



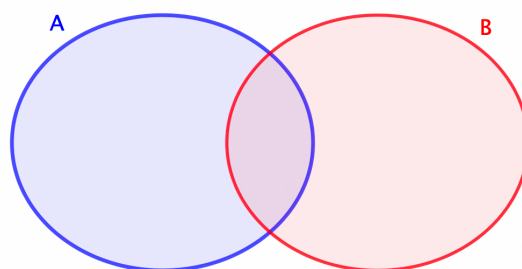
L'ensemble des solutions est l'intervalle $] -\infty ; \frac{7}{2}[$.

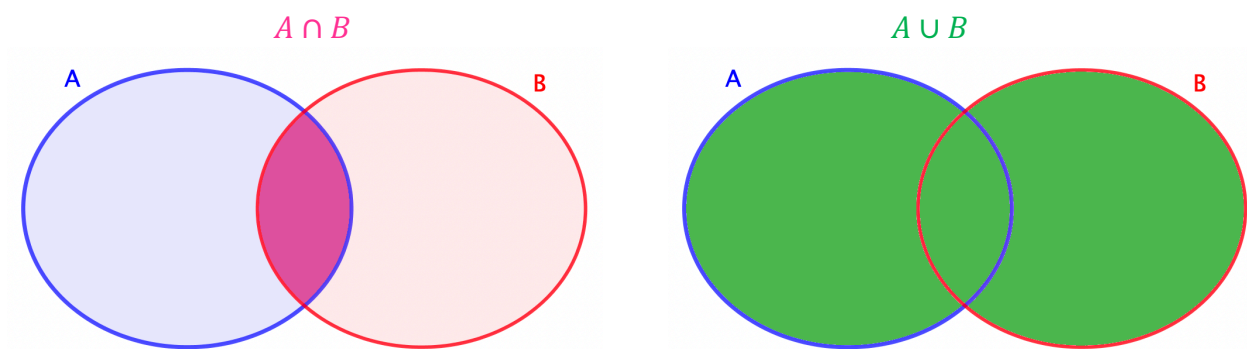
4. Intersections et réunions d'intervalles :

Définitions :

- L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B et se note $A \cap B$.

- La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B et se note $A \cup B$.



**Exemple :**

Soit les ensembles $A = \{1 ; 2\}$ et $B = \{1 ; 3 ; 4\}$.

Alors $A \cap B = \{1\}$ et $A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

Méthode : Déterminer l'intersection et la réunion d'intervalles

▶ Vidéo https://youtu.be/8WJG_QHQs1Y

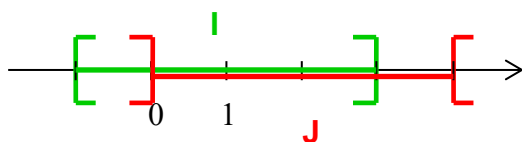
▶ Vidéo <https://youtu.be/hzINDVy0dgg>

Dans les cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J :

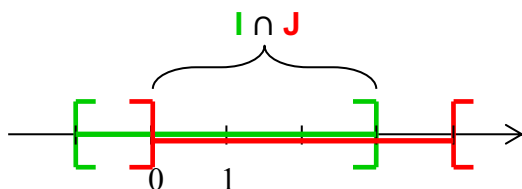
- a) $I = [-1 ; 3]$ et $J =]0 ; 4[$ b) $I =]-\infty ; -1]$ et $J = [1 ; 4]$

Correction

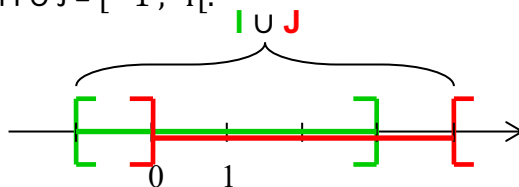
a) - On représente les intervalles I et J sur une même droite graduée.



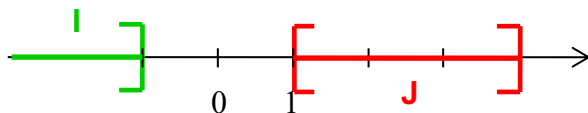
Les nombres de l'intersection des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent à la fois aux deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de la droite graduée où les deux ensembles se superposent. Ainsi $I \cap J =]0 ; 3]$.



- Les nombres de la réunion des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de la droite graduée marquée soit par l'intervalle I soit par l'intervalle J. Ainsi $I \cup J = [-1 ; 4[$.



b)



- Ici, les ensembles I et J n'ont pas de zone en commun. L'intersection des deux intervalles est vide.

Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'**ensemble vide** et se note $\emptyset$.

On a alors : $I \cap J = \emptyset$

- $I \cup J =]-\infty; -1] \cup [1; 4]$

Partie 6 : Valeur absolue d'un réel

▶ Vidéo <https://youtu.be/m3htEMfDxcE>

▶ Vidéo <https://youtu.be/ejxGmpzrciA>

Exemples :

- La valeur absolue de -5 est égale à 5 et on note $|-5| = 5$.

- La valeur absolue de 5 est égale à 5 et on note $|5| = 5$.

- $|11 - 13| = 2$

- $|13 - 11| = 2$

Remarque : La valeur absolue d'un nombre, c'est le nombre sans son signe.

Propriété : Soit A et B deux points d'abscisses respectives a et b sur une droite graduée.

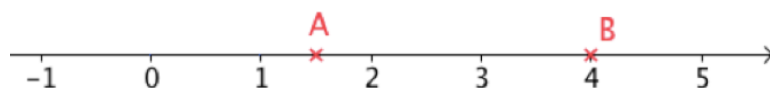
La distance entre les points A et B est le nombre $|a - b|$.

On parle également de distance entre a et b .

Exemple :

La distance entre les nombres 1,5 et 4 est :

$$|1,5 - 4| = |-2,5| = 2,5$$



Méthode : Résoudre une équation avec des valeurs absolues

▶ Vidéo <https://youtu.be/FPj7S1PkNGY>

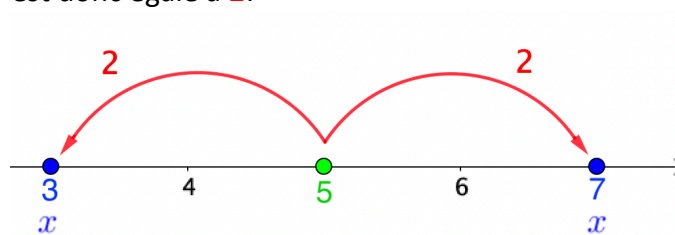
Résoudre l'équation suivante en s'aidant d'une droite graduée : $|x - 5| = 2$

Correction

$$\underbrace{|x - 5|}_{\text{Distance entre } x \text{ et } 5} = 2$$

Distance entre x et 5

La distance entre x et 5 est donc égale à 2.



On en déduit que : $x = 3$ ou $x = 7$.

Méthode : Résoudre une inéquation avec des valeurs absolues

 Vidéo <https://youtu.be/kTJ09D1Bzs0>

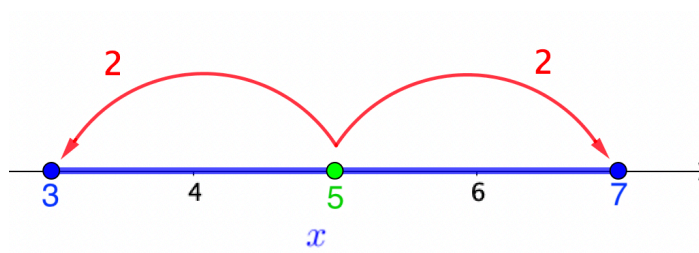
Résoudre l'inéquation suivante en s'aidant d'une droite graduée : $|x - 5| \leq 2$

Correction

$$\underbrace{|x - 5|}_{\text{Distance entre } x \text{ et } 5} \leq 2$$

Distance entre x et 5

La distance entre x et 5 est donc inférieure ou égale à 2.



On en déduit que : $x \in [3 ; 7]$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales